第 2 节 二项式系数与系数（★★☆）

内容提要

本节主要涉及二项式系数与系数的有关问题，下面先梳理相关考点.

1．二项式系数：我们把二项式定理中的C_n^0，C_n^1，C_n^2，…，C_n^n叫做二项式系数，它有如下性质.

①对称性：$C_n^m=C_n^{n-m}$；

②单调性：在二项式系数C_n^0，C_n^1，C_n^2，…，C_n^n中，越靠近中间的越大，越靠近两边的越小. 当n为偶数时，最中间的一项$C_n^{\frac{n}{2}}$最大；当n为奇数时，最中间的两项$C_n^{\frac{n-1}{2}}$和$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等，它们都最大.

③各二项式系数的和：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，且$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

2．系数和：系数和问题一般用赋值法处理，常取$x=1$来求系数和，若要求奇数项或偶数项的系数和，可再取$x=-1$，两式相加、相减即可.

3．系数最大项：求二项展开式的系数最大的项，一般设该项为T_{k+1}，利用这一项的系数不小于前后相邻项的系数建立不等式组求k的范围，再结合k只能取整数得到k的值.

典型例题

类型Ⅰ：二项式系数有关问题

【例 1】二项式$(x^3-2)^6$的展开式中二项式系数最大的项的系数为_____.

解析：要找到二项式系数最大的是哪一项，就看哪一项是最中间的，

由题意，$(x^3-2)^6$的展开式共 7 项，最中间的是第 4 项，它的二项式系数最大，

因为$T_4=C_6^3(x^3)^3(-2)^3=-160x^9$，所以展开式中二项式系数最大的项的系数为$-160$.

答案：-160

【变式】若$(1-2x)^n$的展开式有且只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中x^3的系数为（　　）

（A）-960　（B）960　（C）448　（D）-448

解析：给出只有第 5 项的二项式系数最大，说明n为偶数且第 5 项是最中间的一项，可由此求出n，

只有第 5 项的二项式系数最大$\Rightarrow(1-2x)^n$的展开式共有 9 项，所以$n=8$，

故展开式的通项$T_{r+1}=C_8^r(-2x)^r=(-2)^rC_8^rx^r(r=0,1,2,\cdots,8)$，

令$r=3$可得$T_4=(-2)^3C_8^3x^3=-448x^3$，所以展开式中$x^3$的系数为$-448$.

答案：D

【反思】二项式系数有中间大，两边小的特点. 若$n=2k$，则只有第$k+1$项的二项式系数最大；若$n=2k-1$，则第k项和第$k+1$项的二项式系数都最大.

【例 2】二项式$(3x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中所有二项式系数之和为 64，则该展开式中的常数项为（　　）

（A）9　（B）15　（C）135　（D）540

解析：给出所有二项式系数和，可求出n，再用展开式的通项求常数项，

由题意，展开式的二项式系数之和 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n=64$，所以 $n=6$，

故展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(3x)^{6-r}(\frac{1}{\sqrt{x}})^r=3^{6-r}\mathrm{C}_6^rx^{6-\frac{3}{2}r}(r=0,1,2,\cdots,6)$，

令 $6-\frac{3}{2}r=0$ 可得 $r=4$，所以展开式中的常数项为 $T_5=3^2\mathrm{C}_6^4=135$.

答案：C

【变式】已知 $(x-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中奇数项的二项式系数之和为 32，则展开式中含 x^2 项的系数为_____.

解析：给出奇数项的二项式系数和，可求出 n，

由题意，展开式中奇数项的二项式系数和 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4+\cdots=2^{n-1}=32$，所以 $n=6$，

故展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^rx^{6-r}(-\frac{2}{x})^r=(-2)^r\mathrm{C}_6^rx^{6-2r}(r=0,1,\cdots,6)$，令 $6-2r=2$ 可得 $r=2$，

所以展开式中含 x^2 的项为 $T_3=(-2)^2\mathrm{C}_6^2x^2=60x^2$.

答案：60

【总结】从上面两道题可以看出，二项式系数和 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$，奇数项、偶数项的二项式系数和 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4+\cdots=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^5+\cdots=2^{n-1}$，给出这类条件，就可由此求出 n，再计算其它量.

类型Ⅱ：系数和问题

【例 3】设 $(3x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_6=$______.

解析：涉及二项展开式的系数和问题，用赋值法处理，在所给等式中令 $x=0$ 可得 $a_0=1$，

令 $x=1$ 可得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=64$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_6=64-a_0=63$.

答案：63

【变式 1】已知 a 为常数，$(a+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中各项的系数和为 1，则展开式中的常数项为______.

解析：尽管所给式子为两项之积，但只要涉及系数和，我们都只需将 x 赋值为 1，得到的就是系数和. 若不能理解为什么，读者不妨自行将原式展开，对比一下，即可了解原因.

在 $(a+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$ 中令 $x=1$ 可得其展开式的各项系数和为 $a+1$，由题意，$a+1=1$，所以 $a=0$，

故 $(a+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5=\frac{1}{x}(2x-\frac{1}{x})^5$，要分析展开式的常数项，应考虑 $(2x-\frac{1}{x})^5$ 的含 x 的项，先写出通项，

$(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(2x)^{5-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r2^{5-r}\mathrm{C}_5^rx^{5-2r}(r=0,1,2,\cdots,5)$，

令 $5-2r=1$ 可得 $r=2$，所以 $\frac{1}{x}(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中的常数项为 $\frac{1}{x}T_3=\frac{1}{x}\cdot(-1)^22^3\mathrm{C}_5^2x=80$.

答案：80

【变式 2】（多选）已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则下列结论中正确的有（　　）

（A）各项的二项式系数和为 128

（B）$a_1+a_2+\cdots+a_7=2$

（C）$a_1+a_3+a_5+a_7=-1094$

（D）$a_0+a_2+a_4+a_6=1093$

解析： A 项，各项的二项式系数和为$\mathrm{C}_7^0+\mathrm{C}_7^1+\mathrm{C}_7^2+\cdots+\mathrm{C}_7^7=2^7=128$，故 A 项正确，

B、C、D 三项涉及系数和、奇数项系数和、偶数项系数和，可用赋值法处理，

在题干展开式中令$x=0$可得$a_0=1$，令$x=1$可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$ ①，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_7=-1-a_0=-2$，故 B 项错误；

在题干展开式中令$x=-1$可得$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=2187$ ②，

①$-$②可得$2(a_1+a_3+a_5+a_7)=-2188$，所以$a_1+a_3+a_5+a_7=-1094$，故 C 项正确.

①$+$②可得$2(a_0+a_2+a_4+a_6)=2186$，所以$a_0+a_2+a_4+a_6=1093$，故 D 项正确.

答案： ACD

【总结】 涉及系数和问题，考虑赋值法. 若是求展开式的系数和，令$x=1$即可；若是求奇数项、偶数项的系数和，则可令$x=1$和$x=-1$，并将得到的两式相加、相减即可. 常见的赋值还有$x=0$等.

类型Ⅲ：系数的最大值问题（此类型较难）

【例 4】二项式$(x+\dfrac{2}{x})^9$的展开式中，系数最大的项是_____.

解析： 分析二项展开式的系数有关问题，得用通项，先写出来，

由题意，$T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r x^{9-r}(\dfrac{2}{x})^r=2^r\mathrm{C}_9^r x^{9-2r}(r=0,1,\cdots,9)$，

要找系数最大的项，不妨设该项为T_{k+1}，则该项的系数应不小于前一项T_k以及后一项T_{k+2}的系数，故可由此建立不等式组，求解k的范围，

设T_{k+1}的系数最大，则$\begin{cases}2^k\mathrm{C}_9^k\ge 2^{k-1}\mathrm{C}_9^{k-1}\\2^k\mathrm{C}_9^k\ge 2^{k+1}\mathrm{C}_9^{k+1}\end{cases}$，所以$\begin{cases}2\mathrm{C}_9^k\ge \mathrm{C}_9^{k-1}\\\mathrm{C}_9^k\ge 2\mathrm{C}_9^{k+1}\end{cases}$，从而$\begin{cases}2\cdot\dfrac{9!}{k!(9-k)!}\ge\dfrac{9!}{(k-1)!(10-k)!}\\\dfrac{9!}{k!(9-k)!}\ge 2\cdot\dfrac{9!}{(k+1)!(8-k)!}\end{cases}$，

故$\begin{cases}\dfrac{2}{k}\ge\dfrac{1}{10-k}\\\dfrac{1}{9-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\end{cases}$，所以$\begin{cases}k\le\dfrac{20}{3}\\k\ge\dfrac{17}{3}\end{cases}$，故$\dfrac{17}{3}\le k\le\dfrac{20}{3}$，又$k$只能取整数，所以$k=6$，

这就说明展开式中只有T_7这一项的系数不小于它的相邻项系数，系数最大的必定就是这一项，

故展开式中系数最大的项是$T_7=2^6\mathrm{C}_9^6x^{-3}=5376x^{-3}$.

答案： $5376x^{-3}$

【总结】①求二项展开式的系数最大的项，一般设该项为T_{k+1}，利用这一项的系数不小于前后相邻项的系数建立不等式组求k的范围，再结合k只能取整数得到k的值；②需注意，在某些求概率最值的难题中，由于概率表达式中也常涉及组合数结构，故也可能用上述方法分析最值. 例如，服从二项分布$B(n,p)$的随机变量X，若要求X取何值的概率最大，就可设$P(X=k)$最大，由$\begin{cases}P(X=k)\ge P(X=k+1)\\P(X=k)\ge P(X=k-1)\end{cases}$来找$k$.

强化训练

1．（2022·浙江三模·★）在二项式$(x+2)^4$的展开式中，常数项是_____，二项式系数最大的项是_____.

2．（2023·厦门模拟·★★）在$(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中，只有第5项的二项式系数最大，则展开式中含x^2项的系数为_____.

3．（2022·全国模拟·★★）已知$(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})^n$的展开式中第5项和第6项的二项式系数最大，则其展开式中的常数项为_____.

4．（2022·兰州模拟·★★）已知$(\frac{1}{x}-x)^n$的展开式中二项式系数的和是1024，则它的展开式中的常数项是（　　）

（A）252　（B）-252　（C）210　（D）-210

5．（2022·兰州模拟·★★）（多选）已知$(x-2)^n$的展开式中偶数项的二项式系数之和为128，则（　　）

（A）$n=8$

（B）展开式中各项系数之和为1

（C）展开式的二项式系数之和为256

（D）展开式的中间项为$-1792x^3$

6.（2023・北京模拟・★★）若 $(2-x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$______.

7.（2023・南通模拟・★★）已知 $(3x-1)(x+1)^n$ 的展开式中所有项的系数和为 64，则展开式中含 x^2 的项的系数为（　　）

（A）25　（B）3　（C）5　（D）33

8.（2023・泰州模拟・★★★）若 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_2x^2y^4+\cdots+a_6x^6$，则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=$（　　）

（A）0　（B）32　（C）64　（D）128

9.（2023・江苏模拟・★★★★）已知在 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，第 5 项的系数与第 3 项的系数之比是 $56:3$，则展开式中系数的绝对值最大的是第（　　）项.

（A）6　（B）8　（C）9　（D）11